

大阪商業大学学術情報リポジトリ

数理パズルと数学教育

メタデータ	言語: ja 出版者: 大阪商業大学アミューズメント産業研究所 公開日: 2014-12-13 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 鹿島, 秀元, KASHIMA, Hidemoto メールアドレス: 所属:
URL	https://ouc.repo.nii.ac.jp/records/12

This work is licensed under a Creative Commons
Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0
International License.



数理パズルと数学教育

鹿 島 秀 元

「人によっては「娯楽数学」とか「数学ゲーム」といった名前のものをさげすむ向きがあることは予想できる．こういうものは単なる「娯楽」ではないか．単なる「ゲーム」ではないか．そんなものに価値があり得ない，と彼らは考えるかも知れない．それは単なる暇つぶしにすぎないと」

この文章は，マーティン・ガードナー¹⁾の著書『SF パズル』²⁾のアイザック・アシモフ³⁾による序の中に在るものである．この文章だけを読めば，人は「娯楽数学」や「数学ゲーム」に対して負のイメージを抱くであろう．

だが，アシモフは序の最後の方で，「娯楽数学」や「数学ゲーム」を次の様な文章で表現している．

「このような「ゲーム」は「本格的」数学とくらべて，より底が深いことはあっても浅いことはない．それがより重要であってもおかしくはないし，未来の数学の前触れかも知れないのである」⁴⁾

ここで，少し注意をしておくが，アシモフは「娯楽数学」，「数学ゲーム」という語句を「数理パズル」と同義なものとして使用している．

また，このアシモフの序に続いて，著者であるガードナーは『SF パズル』のはしがきを次の様な言で締め括っている．

「すぐれたパズルは本格的数学の跳躍台になるのが常である．読者は，一見何の変哲もない知恵だめしに思えるものから，そこに含まれ枝分かれしている問題のいくつかを考究するうちに，意外に多くの数学を学んでいることに驚かれるであろう」

上述したことから，或る意味当たり前なのかもしれないが，数理パズルは数学と密接な関連が在り，それ故，数学教育の充実，発展に寄与するところが大きい，ということは想像に難くはない．

そこで，本稿第1節では，数学教育に有益な数理パズルを順不同で紹介し，その略解

を与える．但し，ここで紹介する数理パズルを数学教育の場でどの様に利用して教育効果を上げるかという，具体的な方法論は別の機会に譲ることにして，敢えて言及しない．様々な方法論が在り得るであろうから，各自で考えて頂きたい．そうすることにより教科，単元の教える側としての理解が深まり，そのことが結果として教育効果を上げることにつながると思ふからである．

第2節では，江戸時代に日本で独自に発展を遂げた数学である和算から，いくつかの数理パズル的な問題の中で，特に『油分け算』，『百五減算』と称されるものを取り扱う．これは数学的に見ても，大変興味深い対象で，勿論，数学教育にも有益なものである．

数理パズルの効用の大きなものとして，次の2つが在る．1つは本質を抽出する力が養える，もう1つは工夫する力が養える，というものである．第3節ではまとめとして，これらを目の当たりにできる数理パズルをいくつか紹介する．工夫する力が養えることに関しては，特に初等的な解法と密接な関係が在ることを述べる．

尚，本稿で紹介する数理パズルは，原則略解を与えておくことにする．このことにより，本稿を数学，数学教育とは無関係に純粹にパズル集として楽しんで頂くことも可能かと思う．

1．数学教育に有益な数理パズル

本節では，数学教育に有益な数理パズルをいくつか順不同で紹介することにする．これらの数理パズルは実際，筆者が数学を得意としない学生達に，実際講義の合間に出題したものでもある．筆者は大学で教えている関係上，大学生にしか出題できないが，これらの数理パズルは勿論，小学生，中学生，高校生の算数，数学教育においても有益なものである．

尚【 】内は，その数理パズルが有益であろうと考えられる主たる数学分野であり，初等代数，論理・発想，初等幾何，微分・積分および確率・統計学の各分野に区分している．

1)【初等代数】

相手に好きな 9 以下の自然数（今仮に a とする）を設定して貰う．12345679 に、 a を 9 倍した b ($b = 9a$) を乗じると、 $12345679 \times b = \sum_{k=0}^8 10^k a$ と、答に相手が設定した好きな数字 a が 9 個並ぶ．

例えば、相手が好きな数字として $a = 7$ を設定した場合は、 $b = 9 \times 7 = 63$ となり、

$$12345679 \times b = 12345679 \times 63 = 777777777$$

と 7 が 9 個並ぶ．何故だろうか．

1) の略解． $12345679 \times 9 = 111111111 \dots$ ①となるので、

$$12345679 \times b = 12345679 \times 9 \times a = 111111111 \times a = \sum_{k=0}^8 10^k a,$$

となる．

尚、①式は次の様に考えると釈然と説明出来る． $12345679 \times 9 = 12345679 \times (10 - 1)$
 $= 12345679 \times 10 - 12345679 \times 1 = 123456790 - 12345679 = 111111111$ である．

2)【初等代数】

A, B を十の位の数字が同じであり、一の位の数字の和が 10 であるような 2 桁の自然数とする．このとき、 AB の計算結果は、積（十の位の数字） $\times$ （十の位の数字 + 1）の横に、 A, B の一の位の数字の積を並べ書いたものが計算結果となる．

例えば、 38×32 の計算結果は、積（十の位の数字） $\times$ （十の位の数字 + 1）、つまり、 $3 \times (3 + 1) = 3 \times 4 = 12$ の横に、一の位の数字の積 $8 \times 2 = 16$ を並べ書いた、1216 となる．何故だろうか．

2) の略解．自然数 A, B は、 $A = 10a_1 + a_2$ 、 $B = 10a_1 + (10 - a_2)$ と表される．よって、 $AB = 100a_1(a_1 + 1) + a_2(10 - a_2)$ となる．

3)【論理・発想】

2 本の渦巻き状の線香 A, B が在り、 A, B はどちらも着火してから丁度 32 分で燃え尽きてしまう．これら 2 本の線香を利用して、丁度 24 分の時間を計りたい．どうすれば良

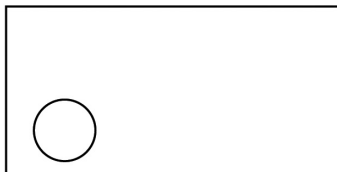
いだろうか．

但し，線香は2本共，一定のスピードで燃えていくものとし，着火等に要する時間は無視するものとする．

3) の略解．線香 A の両端を a_1, a_2 とし，線香 B の両端を b_1, b_2 とする．先ず，同時に a_1, a_2, b_1 に着火する．線香 A が燃え尽きる $32 \div 2 = 16$ 分（このとき，線香 B は残り16分間燃える長さになっている）後に， b_2 に着火する．すると，線香 B は $16 \div 2 = 8$ 分で燃え尽きる．従って，最初からの時間は， $16 + 8 = 24$ 分である．

4) 【初等幾何】

下図のような，円の穴が開いている長方形の板がある．1本の直線でこの板の面積を二等分したい．どのような直線を引けば良いだろうか．



4) の略解．長方形の2本の対角線の交点を通る任意の直線は，長方形の面積 S_1 を二等分する．また，円の中心を通る任意の直線（円の直径）は，円の面積 S_2 を二等分する．従って，長方形の対角線の交点と円の中心を通る直線を引けば，面積 $\frac{S_1 - S_2}{2}$ の板が2枚出来る．

5) 【論理・発想】

長方形の机の上に，同じ大きさの円形のコースターを先手，後手と交互に1枚ずつ置いていく．机の上にコースターを置けなくなった手番の者が負け，というゲームをする．このゲームには，先手必勝の戦略が存在するのだが，その戦略とはいかなるものだろうか．

但し，コースターは重ねて置いたり，コースターを変形して置いたりできないもの

とする．

5) の略解．円形コースターを点とみなす．先手は長方形の対角線の交点 T にコースターを置く．次に後手がどこか（今仮に点 P としておく）へコースターを置くわけだが，先手は線分 PP' の中点が T となる点 P' にコースターを置く．以後先手は，後手の置いたコースターと点 T に関して対称の位置にコースターを置いていくということが続けていけば良い．この様にすると，先手は後手がコースターを置いた後に必ずコースターを置く位置が確保出来てしまうので，最初にコースターが置けなくなる（負ける）手番は必ず後手番の時となる．

6) 【論理・発想】

34個の碁石が在る．この碁石を先手，後手が交互に取っていき，取る碁石が無くなった手番の者が負け，というゲームをする．

このゲームには，先手必勝の戦略が存在するのだが，その戦略とはいかなるものだろうか．

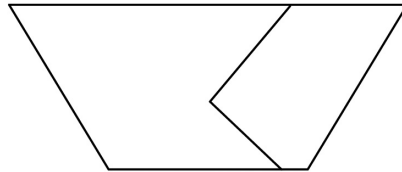
但し，先手も後手も 1 回に取る碁石は 1 個以上 3 個以下とする．

6) の略解．先手が最初に 2 個の碁石を取る．それ以降は，後手の取る碁石が 1 個なら先手は 3 個の碁石を，後手が 2 個なら先手は 2 個の碁石を，後手が 2 個なら先手は 1 個の碁石を取るという様に，後手の取る碁石と先手の取る碁石の合計個数 S が常に 4 となるよう取っていけば良い．

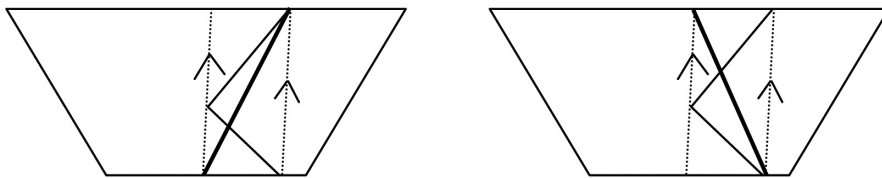
なぜなら，先手が最初に取る碁石の個数を x 個 ($1 \leq x \leq 3$) とし，碁石の個数を $34 - x$ 個として後手に渡す．これ以降は，後手が a 個 ($1 \leq a \leq 3$) の碁石を取れば，次に先手が $4 - a$ 個 ($1 \leq 4 - a \leq 3$) の碁石を取ることが可能で， S を常に $a + (4 - a) = 4$ とすることが可能となる．よって， $34 - x$ が (31 以上 33 以下の) 4 の倍数である 32，即ち， $34 - x = 32$ より， $x = 2$ であれば，最後には先手が碁石を取ることが可能となり先手必勝である．

7)【初等幾何】

下図のような，境界線が「く」の字型の在る土地が在る．この境界線を直線となるよう新たに引き直したい．勿論，左右の土地の面積が変わってはいけない．どう引けば良いだろうか．但し，左右の土地の面積を測量することはしないものとする．



7)の略解．三角形の等積変形を利用する．下図のどちらでも良いのだが，太い線のように引けば良い．但し，2本の点線は平行線である．



8)【初等代数】いわゆる『さっさ立て』という江戸時代からあるパズル．

手元に碁石が20個在る．これらの碁石を下記の①，②，③の3つのルールに従って，箱Aか，箱Bに入れていって貰うものとする．このとき，私は後ろを向いて何も見ていないのだが，手元の碁石が全ていずれかの箱に入ってしまった後，私は瞬時に箱A，箱Bに入っている碁石の個数を言い当てることができる．何故だろうか．

《ルール》

①各回の手順において，箱Aか，箱Bのいずれか一方の箱に必ず碁石を入れるものとする．

②各回の手順において，碁石を箱Aに入れる場合には1個だけ，箱Bに入れる場合には2個だけ入れていくものとする．

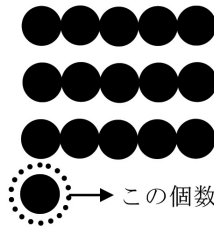
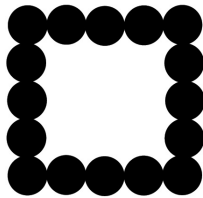
③各回の手順において，箱A，箱Bのいずれに碁石を入れるときには，「さっ」という掛け声を回すつ発するものとする．

8) の略解。「さっ」という掛け声の合計回数 a 回とし、箱 A に入れた時の掛け声の回数を x 回、箱 B に入れた時の掛け声の回数を y 回とすると、次の連立方程式
$$\begin{cases} x + y = a \\ x + 2y = 20 \end{cases}$$
 が成立する。これを变形すると、直ちに $x = 2a - 20$ を得るので、箱 A には $x = 2a - 20$ 個、箱 B には、 $2y = 20 - x = 20 - (2a - 20) = 40 - 2a$ 個の碁石が入っていることになる。即ち、掛け声の合計回数 a を数えていれば、箱 A 、箱 B に入っている碁石の数が即座に解ることになる。

9) 【初等代数】いわゆる江戸時代からある『薬師算』というパズル。

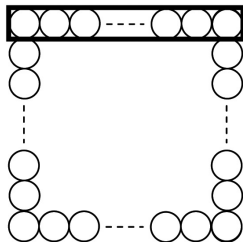
私に見えないように、何個か(12個以上)の碁石を使って碁石を中空の正方形形状に並べてもらう。但し、各辺には、同じ個数(4個以上)の碁石を並べてもらうことにする(下の左図参照)。次に、今作った碁石の正方形の上辺の一边だけを残してくずし、残した一边の下に、くずした碁石を整理させていく(下の右図参照)。

すると何個かの碁石が余る。その余った個数だけを教えてもらうと、私は、即座に使った碁石の合計を言い当てることができる。何故だろうか。

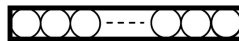


9) の略解。

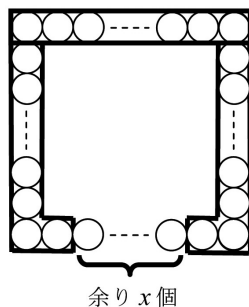
一边同数個の碁石.



これを



の一边を残して、整理させるのだが、崩し方がポイント。下図のように両サイドから一边に並んでいる碁石の個数を取ると解り易い。



上の図の下の一辺に注目すると、一辺の碁石の個数は、 $x+4$ 個であり、1つの黒い枠には、 $x+4$ 個の碁石がある。従って、全部で碁石は、 $3(x+4)+x=4x+12$ 個在ることになる。

10)【微分・積分】

分子が1で、分母が1から始まり1ずつ増えていく分数の無限和、

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots$$

の計算結果はどうなるだろうか。

10) の略解。

$$S = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots \text{とおくと,}$$

$$\begin{aligned} S &> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty \end{aligned}$$

となるので、 $S = \infty$ となる。

11)【微分・積分】

分子が1で、分母が1から始まり2倍、2倍となっている分数の無限和、

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \cdots$$

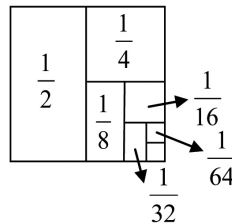
の計算結果はどうなるだろうか．初等的に説明せよ．

11)の略解．下図のように面積が1である正方形を半分、次に残りの半分、次に残りの半分と順々に区切っていく．この操作は、どの段階でも必ず右または下に隙間が残るので、無限に繰り返すことができる．

そして、区切られた各部分の面積の和は、 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \cdots$

となるが、この値は元の正方形の面積1に限りなく近づく

よって、 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \cdots$ の値は、限りなく2に近づく．



12)【初等代数】

8個の箱が在り、箱にはそれぞれ9,17,24,28,30,31,33,44個の飴が入っている．これらの箱全部を中に飴が入ったまま、 A, B, C, D の4人で分けた（但し、飴を箱から取り出したり、他の箱に移したりはしなかったものとする）．

以下の事実が成立するとき、 A は何個入りの飴が入った箱を取ったかを求めよ．

《事実》

- i) A が取った箱は1個だけである．
- ii) B と C が取った飴の個数は等しい．
- iii) B が取った飴の個数は、 D が取った飴の個数の2倍である．

12) の略解 . A, B, C, D が手にした飴の合計個数をそれぞれ , a, b, c, d とすると , $a + b + c + d = 9 + 17 + 24 + 28 + 30 + 31 + 33 + 44 = 216 \dots \textcircled{1}$ である . ここで , 事実 ii) , iii) より , $b = c = 2d \dots \textcircled{2}$ である . $\textcircled{2}$ を $\textcircled{1}$ に代入して整理すると , $a + 5d = 216 \dots \textcircled{3}$ を得る .

ここで , 事実 i) から a は 9, 17, 24, 28, 30, 31, 33, 44 のいずれかの一つの数である . $\textcircled{3}$ より , $216 - a = 5d$ となり , $216 - a$ は 5 の倍数でなければならない . また , 216 は 5 で割ると 1 余る自然数なので , $216 - a$ は 5 の倍数となるには , a も 5 で割ると 1 余る自然数でないといけないことに注意すると , $a = 31$ と一意的に決まる .

因みに , $a = 31$ を $\textcircled{3}$ に代入すると , $d = 37$ と求まり , $\textcircled{2}$ より $b = c = 2 \times 37 = 74$ となる . よって , D は 9 個 , 28 個入りの 2 箱を手にし , b と c はどちらか一方が , 17 個 , 24 個 , 33 個入りの 3 箱を手にし , 他方が 30 個 , 44 個入りの 2 箱を手にしたことになる .

13) 【発想・論理】

$A \sim K$ の 11 人の内 , 何人かの者は常に嘘をつく嘘つきで , 残りの者は常に本当のことを言う正直者である .

そこで , $A \sim I$ の 9 人に 「11 人の内 , 嘘つきは何人か ? 」 と尋ねたところ , 以下のような回答が得られた : A 「10 人です」 , B 「7 人です」 , C 「11 人です」 , D 「3 人です」 , E 「6 人です」 , F 「10 人です」 , G 「5 人です」 , H 「6 人です」 , I 「4 人です」 . さて , 11 人の内 , 嘘つきは何人いるか , そして嘘つきは誰かを求めよ .

13) の略解 . 明らかに C は嘘つきである (もし C が正直者なら , C の発言から 11 人全員が嘘つきであることが真実になる . つまり , C 自身も嘘つきであることになり , C が正直者であるという仮定に矛盾するので) .

次に , A が正直者なら , A の発言の嘘つきは 10 人である , つまり , A 自身以外の者は全員嘘つきであるということが真実となる . 従って , 特に F も嘘つきである . それにも拘らず , F は嘘つきが 10 人であるという真実を述べている . これは矛盾 . 故に , A は嘘つきである .

更に上と同様の議論をする . F が正直者なら , F の発言の嘘つきは 10 人である , つまり , F 自身以外の者は全員嘘つきであるということが真実となる . 従って , 特に A

も嘘つきである．それにも拘らず， A は嘘つきが10人であるという真実を述べている．これは矛盾．故に， F は嘘つきである．

この段階で，嘘つきは少なくとも A, C, F の3人いることになる．従って， D は嘘つきとなる（もし D が正直者なら， D の発言の嘘つきは3人ということが真実であるので，嘘つきは A, C, F の3人だけである．しかし，例えば B は，嘘つきが7人いると真実を述べていないので， B は嘘つきとなってしまう．これでは嘘つきが少なくとも4人いることになり，矛盾する）．

この段階で，嘘つきは少なくとも A, C, D, F の4人いることになる．従って，上の議論と同様にして， I は嘘つきとなる．以下，順に G, E, H は嘘つきとなる．

この段階で，嘘つきは少なくとも A, C, D, E, F, G, H, I の8人いることになる．従って，明らかに B の発言は真実でないので， B は嘘つきとなる．

以上から，嘘つきは少なくとも $A \sim I$ の9人いることになる．また，嘘つきは10人でも11人でもない（もし，嘘つきが10人なら， A と F は正直者となり，嘘つきは A と F を除いた多くて9人となるので矛盾．もし，嘘つきが11人全員なら，嘘つきである C の発言は真実を述べているので矛盾）．よって，嘘つきは， $A \sim I$ の9人である．

14)【発想・論理】

不透明の箱に白色の飴と黒色の飴をそれぞれ1個ずつ，合計2個入っている．その箱から1個だけ飴を取り出し，それが白色なら勝ち，黒色なら負け，というゲームをすることになった．しかし，策略が企てられ，箱の中には2個共黒色の飴が入れられている．このままだとどちらの飴を取り出しても，黒色なので負けてしまう．

このゲームに勝つ起死回生の手が在るという．その手とは，何だろうか．但し，飴はちゃんと箱から取り出すものとする．

14) の略解．取り出した飴の色を確認すること無く，素早く食べてしまい，取り出した飴の色が判らないようにする．自分が取り出した飴の色は，箱の中に残っている飴の色を確認すれば判る（箱に残っている飴の色は黒なので，自分の飴の色は白の筈），という手が在る．

15)【確率・統計学】

事象 A が起きる確率 $P(A)$ は、平易に言うと、 $P(A) = \frac{A \text{ が起こる場合の数}}{\text{起こり得る全場合の数}} \dots \textcircled{1}$ で求めることができる。

ということは、事象 A を「ネッシーが存在する」と考えると、全場合の数は存在するか存在しないかの2通りで、 A が起こる（ネッシーが存在する）場合の数は1通りである。従って、 $\textcircled{1}$ によりネッシーが存在する確率 $P(A)$ は、 $P(A) = \frac{1}{2}$ の50%である。

実はこの議論は、論理的に間違っている。どこが間違っているのだろうか。

15) の略解。 $\textcircled{1}$ の式が適用できる場合は、起こり得る全場合がどれも同程度に起こることが保証されている場合だけである。ネッシーが存在する場合、ネッシーが存在しない場合は、同程度に起こらないと考えられるので、 $\textcircled{1}$ を適用することはできない。

16)【確率・統計学】

中町に住む A さんには、同程度に好意を抱いている2人の女性、北町在住の B さん、南町在住の C さんがいる。どちらか1人の女性と付き合いたいのだが、自分だけでは決断できずに困っている。

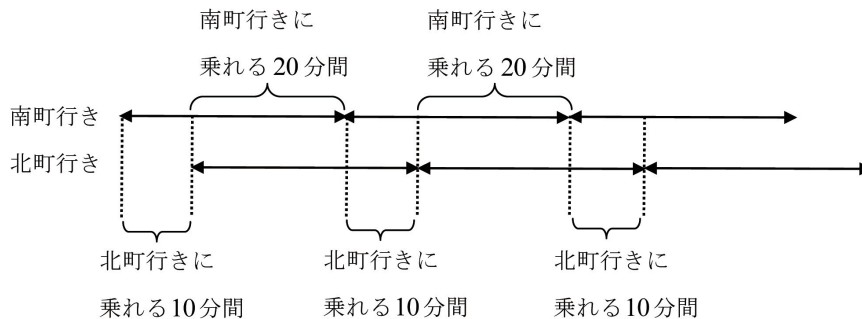
そこで、 A さんは30日の間、毎日、朝、昼、夜問わず、全く無作為な時刻に最寄りのバス停に行き、北町行きのバスが最初に来れば、そのバスに乗り B さんに、南町行きのバスが最初に来れば、そのバスに乗り C さんに会いに行くことにした。その結果、偶然性に任せると言えば語弊が在るかもしれないが、会った回数が多い方の女性と付き合おうと考えている。偶然性の根拠は、北町、南町行きの両バスは、どちらも30分間隔で運行されており、1日の運行本数も両バス共、同じ本数だからである。

そして、30日間の会った回数をデータとして集計すると、 B さんと会ったのは10回、 C さんと会ったのは20回となった。 A さんは、この結果は全くの偶然の結果にも拘らず、これ程の差がついたのは天啓かも知れぬ、 C さんと付き合おうかと考えている。

果たしてこの集計データは、本当に偶然だけに支配されていると考えてよいものだろうか。

16) の略解．北町行きのバスは，南町行きのバスがバス停に来た10分後にバス停に来るように運行されている．従って，バスの運行間隔30分の内，北町行きのバスに乗れるチャンスは10分間しかなく，南町行きのバスに乗れるチャンスは20分間である．両バスに乗れるチャンスの比は， $10:20=1:2$ となる（下図参照）．

Aさんは，無作為にバス停に行くのだから，北町，南町行きのバスに乗る回数も1:2となる．この結果は，偶然でなく必然である．



17)【発想・論理】

1枚10gのコイン10枚が1つの袋に入っている．このような袋が，10袋在る．ところが何者かによって，10袋の内1袋だけが，偽コイン10枚が入っている袋に取り替えられた．台ばかりを1回だけ使用して，偽コインの入った1袋はどれか特定せよ．

但し，偽コイン1枚の重さは，本物のコインより1g軽い，9gとする．また，台ばかりは550gを超える重さは量れないものとする．

17) の略解．10個の袋にⅠ，Ⅱ，Ⅲ，…，Ⅹの番号を付ける．Ⅰの袋からはコインを1枚，Ⅱの袋からはコインを2枚，Ⅲの袋からはコインを3枚，…，Ⅹの袋からはコインを10枚，合計 $1+2+3+\dots+10=55$ 枚のコインを取り出す．これら55枚のコインの重さを台ばかりで量る．この重さは，全て本物のコインである場合の $10 \times 55 = 550$ gより軽いものになっている筈である．

もし，550gより*i*g軽ければ，偽コイン1枚の重さは，本物のコインより1g軽いので，*i*枚の偽コインが取り出した55枚のコインの中に混ざっていることになる．

偽コインはどれか1個の袋からしか取り出されていないので，番号*i*の袋から*i*枚の

偽コインが取り出されたことになる．従って，番号 i の袋が偽コインばかりの袋であると特定できる．

18)【初等代数】

$\frac{2}{9} = \frac{1}{5} + \frac{1}{45}$ のように，分数 $\frac{2}{13}$ を分子が共に 1 である相異なる 2 つの分数の和として表せ．一般的に n が 3 以上の奇数であるとき， $\frac{2}{n}$ を分子が共に 1 である相異なる 2 つの分数の和として表せ．

18) の略解． $\frac{2}{13}$ を例えば，面積 1 の円 2 つを 13 人で等分することと考える．先ず 2 つの円をそれぞれ 7 等分すると，面積 $\frac{1}{7}$ の断片が 14 個できる．面積 $\frac{1}{7}$ の断片を 13 人がそれぞれ 1 個ずつ手にすると，面積 $\frac{1}{7}$ の断片が 1 個だけ残る．その残り $\frac{1}{7}$ を 13 人で等分すると， $\frac{1}{7} \div 13 = \frac{1}{7} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{91}$ となる．従って，各人は面積 $\frac{1}{7} + \frac{1}{91}$ の断片を手にしたことになる： $\frac{2}{13} = \frac{1}{7} + \frac{1}{91}$ ．

今， n が奇数なので， $n+1$ は偶数となるので， $\frac{n+1}{2}$ が自然数となることに注意すると，一般的には， $\frac{2}{n} = \frac{1}{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$ が成立する．

19)【発想・論理】

3 個の赤い帽子と 2 個の白い帽子がある．これら 5 個の帽子を A, B, C の 3 人に見せ，今から 5 個の帽子の内いずれかの帽子を 1 個ずつ各人に被せていくことを伝える．その後，各人に，本人には何色の帽子が見えないように被せていき，余った 2 個の帽子は A, B, C の 3 人には見えないように隠してしまう．

そして， A, B, C の順に自分の帽子は何色かと尋ねると， A と B は，分からないと答えた．しかし， C は， A と B の分からないという答を聞いて暫く考えた後，分かると答え，見事に自分の帽子の色を答えた． C は何色の帽子を被っていると答えたのだろうか．

但し、自分以外の2人の帽子の色は、お互い見えているものとする。

19)の略解． A と B の両人が共に白色の帽子なら、白色の帽子は2個しかないことが事前に分かっているので、 C は考えること無く自分の帽子の色が赤色だと判る．しかし、 C は暫く考えたのであるから、 A と B の両人が共に白色の帽子であるということとは有り得ない．

従って、i) A と B のどちらか一方が赤色の帽子で、他方が白色の帽子である場合、ii) A と B のどちらも赤色の帽子である場合の2つの場合しか有り得ない．

i)の場合．もし、 C の帽子の色が白色であれば、 A と B の内、赤色の帽子を被っている方の者は白色の帽子を2個見ることになるので、自分の帽子の色が赤色だと気付く．しかし、 A も B も自分の帽子の色は判らないと答えたのであるから、 C の帽子の色は白色でなく赤色だと判る．

ii)の場合．もし、 C の帽子の色が白色であれば、 B は次のように考えて自分の帽子の色が赤色だと判る筈である： B の考え「もし自分が白色の帽子なら、 A は自分(B)と C の帽子の2個の白色の帽子を見ていることになるので、 A は自分の帽子の色が赤色だと判る筈である．しかし、 A は判らないと答えた．ということは、自分(B)の帽子の色は白色でなく、赤色である」

だが、 B は判らないと答えた．ということは、 C の帽子の色が白色ではなく、赤色であると判る．

以上 i), ii) いずれの場合も、 C は自分の帽子の色が赤色であると推論できる．

20)【発想・論理】

川岸に4隻のボート A, B, C, D がある．この4隻を全部向こう岸へ最短時間で運ぶことを考える．但し、 A, B, C, D のボートで川を横断するのに、それぞれ1分、3分、6分、9分かかる．但し、2隻までは同時に運ぶことができるが、その場合は遅い(横断に要する時間が長い)方の船の時間がかかるものとする．

20)の略解．よくある間違いは、 B, C, D を向こう岸に運ぶ際、往復するのに A のみを使って、20分という誤答．20分が正解だと当たり前過ぎて、この問題はパズルになら

ない。

正解は，19分である（下表参照）。

A, B, C, D 0分後		
C, D	$(A, B) \longrightarrow$	A, B 3分後
B, C, D 6分後	$\longleftarrow (B)$	A
B	$(C, D) \longrightarrow$	A, C, D 15分後
A, B 16分後	$\longleftarrow (A)$	C, D
	$(A, B) \longrightarrow$	A, B, C, D 19分後

21)【初等代数】

10進数で表された自然数 a を 8 進数で表す方法は， a を 8 で割り，商 q_1 と余り r_1 を求める．次に q_1 を 8 で割り，商 q_2 と余り r_2 を求める．次に q_2 を 8 で割り，商 q_3 と余り r_3 を求める，ということを次々に続けていく． n 回目での割り算で初めて，商 q_n が 8 より小さくなったとする．

このとき，10進数で表された自然数 a は，8 進数で $n+1$ 桁の数として，商 q_n と各段階での余り $r_n, r_{n-1}, \dots, r_2, r_1$ をこの順に並べた $q_n r_n r_{n-1} \dots r_2 r_1$ と表わせる（ $q_n r_n r_{n-1} \dots r_2 r_1$ は， $q_n \times 8^n + r_n \times 8^{n-1} + r_{n-1} \times 8^{n-2} + \dots + r_2 \times 8 + r_1$ という意味である．）

この理屈を適当な例えで，説明するにはどうしたらよいか． $a = 1234$ として，考えよ．

21) の略解．仮想的に 8 円硬貨， $8^2 = 64$ 円硬貨， $8^3 = 512$ 円硬貨， $8^4 = 4096$ 円硬貨があったとして，1 円硬貨 4321 枚，4321 円を順々に高額硬貨に両替することを考えれば良い．

まず， $4321 \div 8 = 540 \dots 1$ なので，8 円硬貨に両替すると，8 円硬貨が 540 枚と 1 円硬貨が 1 枚となる． $q_1 = 540$ ， $r_1 = 1$ ．

次に，8 円硬貨 540 枚を 64 円硬貨（8 円硬貨 8 枚分）に両替する． $540 \div 8 = 67 \dots 4$ なので，64 円硬貨が 67 枚と 8 円硬貨が 4 枚となる． $q_2 = 67$ ， $r_2 = 4$ ．

次に，64 円硬貨 67 枚を 512 円硬貨（64 円硬貨 8 枚分）に両替する． $67 \div 8 = 8 \dots 3$ なの

で、512円硬貨が8枚と64円硬貨が3枚となる． $q_3=8$ ， $r_3=3$ ．

次に、512円硬貨8枚を4096円硬貨（512円硬貨8枚分）に両替する． $8 \div 8 = 1 \dots 0$ なので、4096円硬貨が1枚と512円硬貨が0枚となる． $q_4=1$ ， $r_4=0$ ．

以上より、 $4321 = 1 \times 4096 + 0 \times 512 + 3 \times 64 + 4 \times 8 + 1 = 1 \times 8^4 + 0 \times 8^3 + 3 \times 8^2 + 4 \times 8 + 1$ となるので、10進数で表された4321は、8進数として10341と表わせる．

22)【初等代数】

あるホテルの客室には、1号室から1000号室までの番号が付いているのだが、4と9の数字は使用していないという．

つまり、1号室、2号室、3号室、5号室、6号室、7号室、8号室、10号室、...、13号室、15号室、...、18号室、20号室、...、23号室、25号室、...、28号室、30号室、...、33号室、35号室、...、38号室、50号室、...というように、客室番号が付けられている．このホテルの実際の客室数は、全部で何室在るのだろうか．

また、実際の客室数が489室である別のホテルが、これと同様な番号を客室に付けるとすると、1号室から何号室までとなるか．

22)の略解．実際の客室数と客室番号の対応を見ると、1室目が1号室、2室目が2号室、3室目が3号室、4室目が5号室、5室目が6号室、6室目が7号室、7室目が8号室、8室目が10号室と8室揃えば、客室番号は桁が1つ上がって10号室となる．

即ち、客室番号は8進法での数え方になっている．よって、客室番号が1000号室の1000は、8進数である．これを10進数で表せば、 $1000_{(8)} = 1 \times 8^3_{(10)} = 512_{(10)}$ となり（数字の右下の (n) は、その数が n 進数での数であることを示している）、これが実際の客室数となる．

2つ目の問題は、1つ目の問題とは逆に、実際の客室数である10進数での489を8進数で表せば、客室番号が求まる．答は、861号室． $489_{(10)} = 7 \times 8^2 + 5 \times 8 + 1_{(10)} = 751_{(8)}$ なので、751号室とすれば、誤答である．

これが誤答となる理由は、各自で考えて頂きたい．

23)【微分・積分】

アキレスとカメのゼノンのパラドックス．アキレスと亀がいて，両者は徒競走をすることになった．そこで足の遅い亀はハンディキャップを貰い，アキレスより前方の地点 A からアキレスと同時にスタートすることにする．

スタート後，アキレスが地点 A に達したときには，亀はアキレスが地点 A に達するまでに要した時間分だけ先の地点 B に進んでいる．更にアキレスが地点 B に達したときには，亀はアキレスが地点 B に達するまでに要した時間分だけ先の地点 C へ進んでいる．

以後同様に，アキレスが地点 C に達したときには，亀は更にその先の地点にいることになる．このように考えていくと，この考えは無限に繰り返すことができるので，いつまで経っても（永遠に），アキレスは亀に追いつけない．

しかし，上の考えは，明らかにアキレスが亀に追いつくという事実と矛盾する．上の考えのどこがどのようにおかしいのかを指摘せよ．

23) の略解．無限回の操作に無限の時間が必要であると考えているところにおかしな部分がある．無限回の操作に無限の時間が必要であるという考えは，例えるなら，各回の操作は限りなく 0 秒に近い時間で終わるのに，各回の操作を無理やりスロービデオでコマ送りして長い時間をかけて見ているようなものである．時間が一様に流れていくとすれば，これはナンセンスな考えである．

別の例えを提示するなら，1 から 10 迄数えるのに，1，2，3，…，9 と 9 迄は普通に数え，次からは 9.1，9.2，9.3，…，9.9 と数え，続いて 9.91，9.92，9.93，…，9.99，続いて 9.991，9.992，9.993，…，9.999 というように数えれば，永遠に 10 迄数えられない．

24)【初等代数】

相手に誕生日と誕生日を足して貰い，その答えを 3 倍して貰う．更に，その答えに誕生日の 10 倍を加えて幾つになったかを教えて貰う．そうすると，相手の誕生日が判明する．例えば，402 と教えて貰えば，相手の誕生日は 4 月 30 日である．どのようにすれば，相手の誕生日が判るのか．

24) の略解．相手の誕生月日を m 月 d 日とし，相手が教えてくれる計算結果を x とする． x を 9 倍して，13 で割った余りが m である． $\frac{x-3m}{13}$ が d である．

このようにして求まる理由は，次の通りである．相手にして貰う計算の仕方から， x は $x = 3(m + d) + 10d = 3m + 13d \dots \textcircled{1}$ である．よって， $9x = 9(3m + 13d) = 27m + 9 \times 13d$ となり， $9x$ を 13 で割った余りは， $9 \times 13d$ が 13 の倍数であるので， $27m$ を 13 で割った余りと一致する．ここで， $27m$ を 13 で割った余りは， $27m = m + 26m = m + 13 \times 2m$ より， $13 \times 2m$ が 13 の倍数であることに注意すると， m を 13 で割った余りと一致する．

m は誕生月なので，1 から 12 迄の整数値をとる．即ち， m を 13 で割った余りは， m となる（商が 0，余りは m ）．これで m の値が判明するので， $\textcircled{1}$ を変形して， $d = \frac{x-3m}{13}$ と d の値が判明する．

$x = 402$ の場合だと， $9x = 9 \times 402 = 3618$ ． $3618 \div 13 = 278 \dots 4$ と（商と余りを求めてくれる関数電卓があれば）瞬時に， $m = 4$ と判明し， $d = \frac{x-3m}{13} = \frac{402-3 \times 4}{13} = \frac{390}{13} = 30$ と瞬時に d も判る．

2. 『油分け算』，『百五減算』

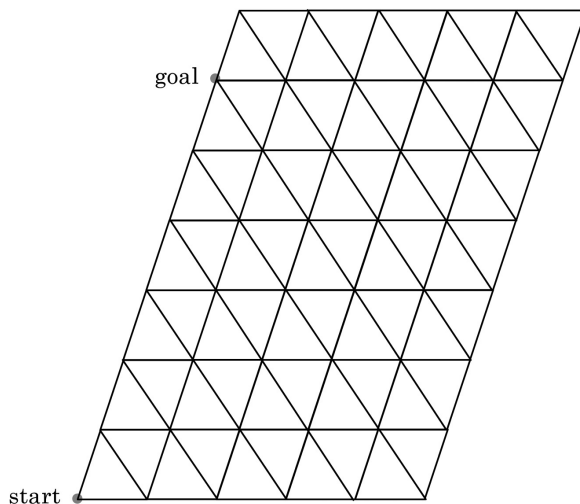
本節では，^{よしだ みつよし}吉田光由⁵⁾ が自著『塵劫記』で取り扱っているパズル的な問題から，特に『油分け算』と『百五減算』との 2 つを採り上げ，これらのパズルな問題が内包している数学を垣間見ることにする．

唐突だが先ず，次のパズルから始める．

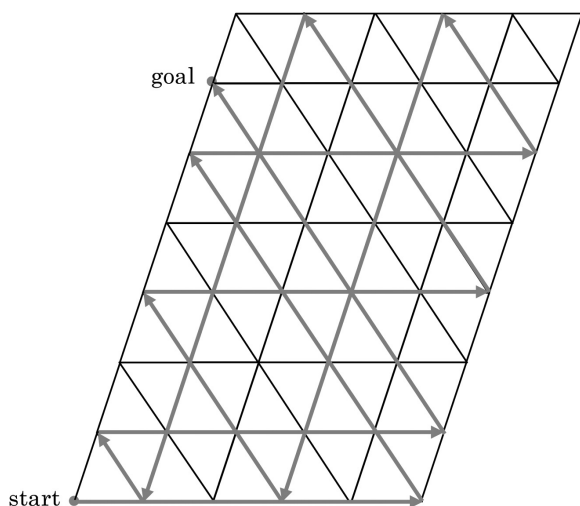
パズル I)

下図のような格子状の図がある．左下の start 地点から goal 地点まで，線に沿って行きたい．線に沿って進む限り，左，右，左斜め上，左斜め下，右斜め上，右斜め下のいずれの向きに進んでも良い（外枠の線を進むことも可能である）が，いずれかの向きに進んだなら，途中で（外枠の線に到達するまで）向きを変更しないものとする．

さて，どのような経路で goal まで進めば良いか．



パズルⅠの解答は色々有ろうが，解答の一例を示せば，下図のように，矢印に従って進めば良い．



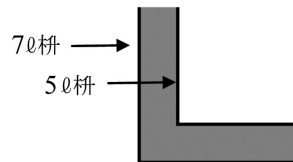
次に紹介するパズルが，『塵劫記』で取り扱われている『油分け算』と称されるものである．

パズルⅡ)(問題設定，数値，単位は『塵劫記』のものを変えてある)

12ℓの油が樽に入っている．7ℓ枴と5ℓ枴がそれぞれ1個ある．この2個のマスのみを使用して，丁度6ℓの油を汲み出したい．どのようにすれば良いか．

但し， 7ℓ ， 5ℓ の半分の量を汲み出す等，枡を斜めに傾けて使用することはできないものとする．

もし枡の縁の厚さが無視できるなら，このパズルの解答の一例として次のようなものが在る． 7ℓ 枡と 5ℓ 枡の上面が揃うように手で持つなどしてセットし， 7ℓ 枡と 5ℓ 枡の隙間に油を注ぎ込めば， 2ℓ の油を量り取れる（下図参照）．



このようにして計り取った 2ℓ の油を 5ℓ 枡に移す．この操作をもう一度繰り返すと， 5ℓ 枡に 4ℓ の油が入ることになる．

最後にもう一度， 7ℓ 枡と 5ℓ 枡の隙間に 2ℓ の油を隙間に注ぎ込み， 5ℓ 枡に入っている 4ℓ の油を移してやれば， 7ℓ 枡に 6ℓ の油が入っていることになる．

次に，上の解答とは違う（或る意味正統的な）他の解法を与える．これは，次のような数学的なものである．

5ℓ 枡で x 回汲み出し， 7ℓ 枡で y 回汲み出し， 6ℓ の油を汲み出すものとする．但し，整数 x ， y のいずれかが負の値になるが，負の値の場合は汲み戻すと解釈する．

即ち，整数 x ， y は， $5x+7y=6$...①を満たす．

明らかに， $5\times 3+7\times(-2)=1$ なので，この等式の両辺を6倍して， $5\times 18+7\times(-12)=6$...②を得る．

①，②の辺々を引いて， $5(x-18)+7(y+12)=0$ を得る．移項して整理すると， $5(x-18)=-7(y+12)$ となる．この等式の両辺を5で割ると， $x-18=-\frac{7}{5}(y+12)$ を得る．

ここで，左辺の $x-18$ は整数なので，右辺の $-\frac{7}{5}(y+12)$ も整数である．従って，5と7は互いに素（最大公約数が1）であるから， $y+12$ が5の倍数でないとはいけない．

よって， $y+12$ は t を整数として， $y+12=5t$ と表わせる．つまり， $y=-12+5t$...③となる．これを①に代入して， x を求めると， $x=18-7t$...④を得る．

ここで，③，④で例えば $t=2$ とすると， $x=18-7t=4$ ， $y=-12+5t=-2$ を得る．これは，5ℓ 枅で4回汲み出し，7ℓ 枅で2回汲み戻す（-2回汲み出す）ことを意味している．これを元に，具体的な手順を考えれば，下の表1のようにまとめられる．

また，③，④で例えば $t=3$ とすると， $x=18-7t=-3$ ， $y=-12+5t=3$ を得る．これは，7ℓ 枅で3回汲み出し，5ℓ 枅で3回汲み戻す（-3回汲み出す）ことを意味している．これを元に，具体的な手順を考えれば，下の表2のようにまとめられる．

手順 回数	樽	5 ℓ 枅	7 ℓ 枅	5 ℓ 枅 使用 回数	7 ℓ 枅 使用 回数
0回目	12	0	0		
1回目	7	5	0	1	
2回目	7	0	5		
3回目	2	5	5	2	
4回目	2	3	7		1
5回目	9	3	0		
6回目	9	0	3		
7回目	4	5	3	3	
8回目	4	1	7		2
9回目	11	1	0		
10回目	11	0	1		
11回目	6	5	1	4	
12回目	6	0	6		

表1

手順 回数	樽	5 ℓ 枅	7 ℓ 枅	5 ℓ 枅 使用 回数	7 ℓ 枅 使用 回数
0回目	12	0	0		
1回目	5	0	7		1
2回目	5	5	2	1	
3回目	10	0	2		
4回目	10	2	0		
5回目	3	2	7		2
6回目	3	5	4	2	
7回目	8	0	4		
8回目	8	4	0		
9回目	1	4	7		3
10回目	1	5	6	3	
11回目	6	0	6		

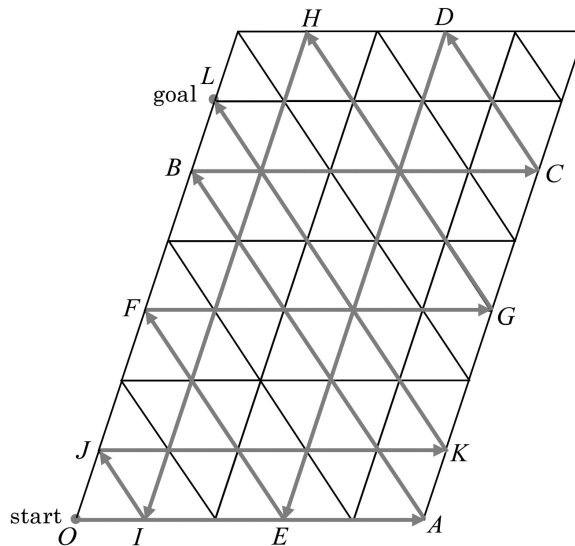
表2

さて，上述したパズルⅠとパズルⅡは，一見すれば何ら関係が無いように思えるが，実は本質的に同一のパズルである．この理由は，次の通りである．

パズルⅠの解法で示した矢印の先の点（仮に点 A とする）の、一番下の横の線が目盛り（仮に p とする）と一番左の斜めの線が目盛り（仮に q とする）は、それぞれ 5ℓ 枴に入っている油の量が $p\ell$ 、 7ℓ 枴に入っている油の量が $q\ell$ であることを示しているものとする。

即ち、点 A の座標 (p, q) が、 5ℓ 枴、 7ℓ 枴にそれぞれ $p\ell$ 、 $q\ell$ の油が入っている状態を表しているものとする。

例えば、下図の点 D の座標は、 $(3, 7)$ なので、 5ℓ 枴には 3ℓ 、 7ℓ 枴には 7ℓ の油が入っている状態を、点 F の座標は、 $(0, 3)$ なので、 5ℓ 枴は空、 7ℓ 枴には 3ℓ の油が入っている状態を表している。



上のように座標が各枴の油の量を表すものと考え、線に沿った各方向への移動（矢印の方向）の意味するところは、次のようになる：

右方向（→）の移動は、 5ℓ 枴を満杯にすることを意味し、

左方向（←）の移動は、 5ℓ 枴を空にすることを意味し、

右斜め上（↗）の移動は、 7ℓ 枴を満杯にすることを意味し、

左斜め下（↙）の移動は、 7ℓ 枴を空にすることを意味し、

左斜め上（↖）の移動は、 5ℓ 枴に入っている油を 7ℓ 枴へ移すことを意味し、

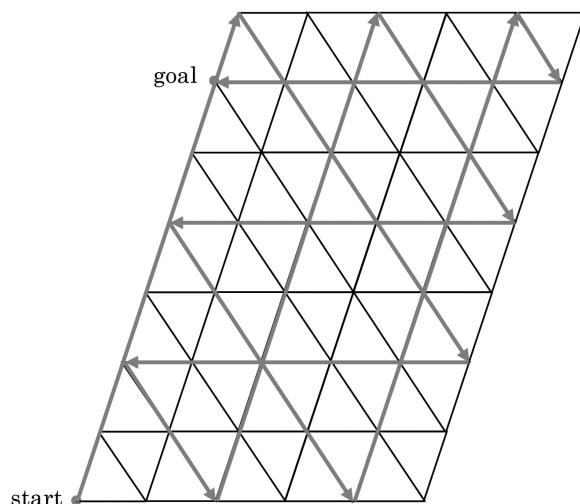
右斜め下（↘）の移動は、 7ℓ 枴に入っている油を 5ℓ 枴へ移すことを意味している。

る。

上述したことからパズルⅠは，start 地点の座標(0,0)の(5ℓ 枧，7ℓ 枧の両方に油が入っていない)状態から，goal 地点の座標(0,6)の(5ℓ 枧は油が入っていない，7ℓ 枧には6ℓ の油が入っている，即ち，6ℓ の油を汲み出せた)状態に到達するには，7ℓ 枧と5ℓ 枧をどう使用していけば良いかを問うパズルである．これは，正にパズルⅡそのものである．

尚，上図の各矢印の先の点 $O, A, B, \dots, L$ の座標はそれぞれ，パズルⅡの解答で与えた表Ⅰの手順の0回目，1回目，2回目， $\dots$ ，12回目の5ℓ 枧，7ℓ 枧の状態に対応している．

参考として，パズルⅡの表Ⅱの手順に対応するパズルⅠでの解答を下に与えておく．勿論この場合も，各矢印の先の点の座標はそれぞれ，パズルⅡの解答で与えた表Ⅱの手順の各回の5ℓ 枧，7ℓ 枧の状態に対応している．



さて，次に『百五減算』と称されるパズルを紹介する．

パズルⅢ)(問題設定，数値は『塵劫記』のものと変えてある)

意中の人々の年齢は，気になるものだが，「あなたの年齢を教えてください」などと聞けない．不躰で，無粋である．

そこで，意中の人に「あなたの年齢を3で割ったときの余り，5で割ったときの余り，7で割ったときの余りを教えてください」と聞けば，どうだろう．

仮に，3で割ると2余り，5で割ると4余り，7で割ると1余る，と教えてもらった

場合、意中の人の年齢が、すぐに判りますか．

年齢を x 歳とすると、 $x = 3l + 2 \dots ①$ 、 $x = 5m + 4 \dots ②$ 、 $x = 7n + 1 \dots ③$ (l, m, n は整数) と表される．

①、②の辺々を引いて、 $3l + 2 - (5m + 4) = 0$ となり、整理して、 $3l - 5m = 2 \dots ④$ を得る．また、 $3 \times (-1) - 5 \times (-1) = 2 \dots ⑤$ である．

④、⑤の辺々を引いて、 $3(l+1) - 5(m+1) = 0$ となり、整理して、 $3(l+1) = 5(m+1) \dots ⑥$ を得る．

⑥の両辺を 5 で割ると、 $\frac{3(l+1)}{5} = m+1$ となる．この式は、右辺の $m+1$ は、明らかに整数であるので、左辺の $\frac{3(l+1)}{5}$ も整数でなければいけない．3 と 5 は互いに素 (最大公約数が 1) であるから、 $l+1$ が 5 で割り切れないといけない．つまり、 $l+1$ は 5 の倍数である．従って、ある整数 s により、 $l+1 = 5s$ 、つまり、 $l = 5s - 1 \dots ⑦$ となっていないといけない．

⑦を①に代入して整理すると、 $x = 15s - 1 \dots ⑧$ となる．

次に、⑧、③の辺々を引いて、 $15s - 1 - (7n + 1) = 0$ となり、整理して、 $15s - 7n = 2 \dots ⑨$ を得る．また、 $15 \times 2 - 7 \times 4 = 2 \dots ⑩$ である．

⑨、⑩の辺々を引いて、 $15(s-2) - 7(n-4) = 0$ となり、整理して、 $15(s-2) = 7(n-4) \dots ⑪$ を得る．

⑪の両辺を 7 で割ると、 $\frac{15(s-2)}{7} = n-4$ となる．この式は、右辺の $n-4$ は明らかに整数であるので、左辺の $\frac{15(s-2)}{7}$ も整数でなければいけない．15 と 7 は互いに素 (最大公約数が 1) であるから、 $s-2$ が 7 で割り切れないといけない．つまり、 $s-2$ は 7 の倍数である．従って、ある整数 t により、 $s-2 = 7t$ 、つまり、 $s = 7t + 2 \dots ⑫$ となっていないといけない．

⑫を⑧に代入して整理すると、 $x = 105t + 29 \dots ⑬$ となる．

今の場合、 $t = 0$ (t が 0 以外の整数だと年齢としては不適) を⑬に代入して、 $x = 29$ 歳を得る．

この『百五減算』は、数学的には、上のようにして解を求めるのが普通であり、普遍的方法である．しかし、『塵劫記』簡便法として次のような式を利用する解答が記載されている．

ある整数 x を 7 で割ると a_1 余り, 5 で割ると a_2 余り, 3 で割ると a_3 余るとき, ある整数 x は, $15a_1 + 21a_2 + 70a_3$ の値を計算し, その値から 105 の倍数を増減させれば良い. 特に, x が年齢である場合は, 105 の倍数を減ずることになる. このことが『百五減算』と称される所以である.

パズルⅢの場合だと, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2$ なので, $15a_1 + 21a_2 + 70a_3 = 239$ となる. この値から, 105 の 2 倍である 210 を引いて, $239 - 210 = 29$ となる.

この簡便法だと至極簡単に求まる. しかし, 鍵となる $15a_1 + 21a_2 + 70a_3$ という式はどのように求めたのであろうかという疑問が残る. この疑問を解決してくれるのが, 下に紹介する定理である. この定理は, 「中国の剰余定理 (Chinese remainder theorem)」と呼ばれ, 中国の数学書『孫子算経』に由来する整数の剰余に関する定理である. それ故, 孫子の定理とも, 中国人の剰余定理とも呼ばれる.

少し語句の準備をしておく. 2 整数 s , t の差が整数 m の倍数であるとき, s と t とは m を法として互いに合同であるといい, $s \equiv t \pmod{m}$ と表わす. もし, 整数 t が $0 \leq t < m$ を満たしていれば, t は s を m で割ったときの余りである.

定理 (Chinese remainder theorem)

$m_1, m_2, \dots, m_k$ はどの 2 つをとっても, 互いに素である整数とし, $a_1, a_2, \dots, a_k$ を任意の整数とすると,

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \dots\dots\dots \\ x \equiv a_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

を満足させる整数は, $M = m_1 m_2 \dots m_k$ を法としてただ 1 つだけ存在する.

また, 整数 x は $x \equiv a_1 M_1 t_1 + a_2 M_2 t_2 + \dots + a_k M_k t_k \pmod{M}$ として, 与えられる. 但し, 整数 $M_1, M_2, \dots, M_k$ は, $M_1 = \frac{M}{m_1}$, $M_2 = \frac{M}{m_2}$, $\dots$, $M_k = \frac{M}{m_k}$ である. また, 整数 $t_1, t_2, \dots, t_k$ は, $M_1 t_1 \equiv 1 \pmod{m_1}$, $M_2 t_2 \equiv 1 \pmod{m_2}$, $\dots$, $M_k t_k \equiv 1 \pmod{m_k}$ を満たす整数であるが, 満たささえすれば何でも良い. ■

この定理から, 上述した鍵となる $15a_1 + 21a_2 + 70a_3$ という式が次のようにして得られる.

今の場合， $m_1=7$ ， $m_2=5$ ， $m_3=3$ であり，これらはどの2つをとっても，互いに素であるので上述の定理を適用できる．また， $M = m_1m_2m_3 = 7 \times 5 \times 3 = 105$ であるので，整数 M_1 ， M_2 ， M_3 は， $M_1 = \frac{M}{m_1} = \frac{105}{7} = 15$ ， $M_2 = \frac{M}{m_2} = \frac{105}{5} = 21$ ， $M_3 = \frac{M}{m_3} = \frac{105}{3} = 35$ である．

また，整数 t_1 ， t_2 ， t_3 は， $M_1t_1 = 15t_1 \equiv 1 \pmod{7}$ ， $M_2t_2 = 21t_2 \equiv 1 \pmod{5}$ ， $M_3t_3 = 35t_3 \equiv 1 \pmod{3}$ を満たす整数であれば何でも良いのだが，今仮に $t_1=1$ ， $t_2=1$ ， $t_3=2$ とする．

従って，上述の定理より， $x \equiv a_1M_1t_1 + a_2M_2t_2 + a_3M_3t_3 = 15a_1 + 21a_2 + 70a_3 \pmod{105}$ と，整数 x は105を法として $15a_1 + 21a_2 + 70a_3$ と求められる．

因みに，上の t_3 は， $M_3t_3 = 35t_3 \equiv 1 \pmod{3}$ を満たしさえすれば何でも良いので， $t_3=-1$ としても差し支え無い．

この場合だと， $x \equiv a_1M_1t_1 + a_2M_2t_2 + a_3M_3t_3 = 15a_1 + 21a_2 - 35a_3 \pmod{105}$ と，整数 x は105を法として $15a_1 + 21a_2 - 35a_3$ と求められる．

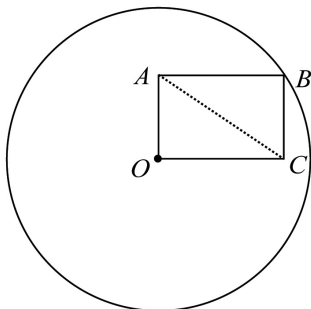
この式でパズルⅢを解くと， $a_1=1$ ， $a_2=4$ ， $a_3=2$ なので， $15a_1 + 21a_2 - 35a_3 = 29$ とズバリと求まる．しかしこれは，たまたまで，一般的には $15a_1 + 21a_2 - 35a_3$ の値から105の倍数を増減させなければ，年齢としてはおかしい値になる場合がある．

3．数理パズルの効用と初等的解法

数理パズルの効用の大きなものとして，1つは本質を抽出する力が養える，もう1つは工夫する力が養える，という2つが在る．

本質を抽出する力が養えるという意味で，次の数理パズルは恰好のものである．

パズル：下図のように，点 O を中心とする半径5の円 O があり，円 O の内部に長方形 $OABC$ がある．但し，頂点 B は円 O の円周上にある．このとき， AC の長さはいくらか．



この数理パズルを以下のように解いても、勿論良い。

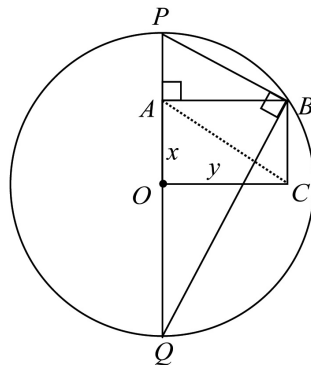
$OA = x, OC = y$ とし、辺 OA を上下に延長してできる円 O の直径を PQ とする（右図参照）。

このとき、 $\angle PAB = \angle BAQ = 90^\circ$ 。また、 $\angle PBQ = 90^\circ$ に注意すると $\angle APB = \angle ABQ$ なので、 $\triangle PAB \sim \triangle BAQ$ 。

よって、 $AP:AB = AB:AQ$ 。ここで $AB = OC$ に注意すると、 $(5-x):y = y:(5+x)$ より、 $y^2 = (5+x)(5-x) = 5^2 - x^2$ を得る。

即ち、 $x^2 + y^2 = 5^2$ 。

ピタゴラスの定理より、 $AC^2 = OA^2 + OC^2 = x^2 + y^2$ だから、 $AC^2 = 5^2$ 。 $AC > 0$ より、 $AC = \sqrt{5^2} = 5$ 。■



上述の数理パズルは、長方形の2本の対角線の長さは等しいという本質を見抜きさえすれば、いとも簡単に解けてしまう。つまり、 $AC = OB$ であり、 OB は円 O の半径だから $OB = 5$ である。よって、 $AC = 5$ である。

工夫する力が養えるということに関しては、恰好の例が多く和算の問題に見受けられる。と言うのも、和算の問題、特に算額⁶⁾に掲載されている問題は、初等的解法で解ける問題が多い（同じくらいに高等の解法でしか解けない問題も多いのだが）。

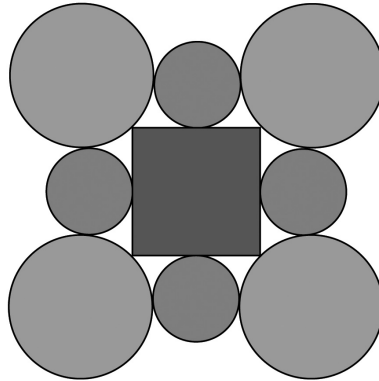
初等的解法で解くという背景には、使用できる知識が限定されるので、必然的に本質を見据えた工夫をせざるを得ない、と同時に初等的な知識しか使用できないが故に、大きなエネルギーを要する（しんどい）と云う事情が在る。

しかし、多くのエネルギーを要して工夫して解けたときの達成感は、非常に大きく感じるものである。この辺の事情は、小学校の算数の鶴亀算⁷⁾等の応用問題（文章題）は、中学で習う方程式を使って解くと容易に解けるが、小学校で解くように方程式を使わずに解くには、工夫して、しんどい目をしながらでないと解けない。しかし、解けたときの達成感の大きさは昔の経験を思い出せば、或いは想像すればよく解るであろう。

工夫する力が養える数理パズルの恰好の一例として、NHK BS 歴史館 江戸のスーパー日本人1『関孝和 世界水準の“和算”を創り出した男』（平成25年6月20日に放映）で紹介された算額（京都の長岡天満宮に保存されている。奉納者は今堀彌吉、12

歳)の問題を紹介する．

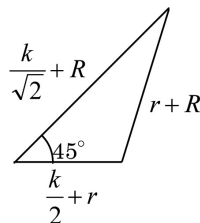
パズル：下図のように直径 5 寸の大円 4 個と直径 3 寸の小円 4 個が，お互いに接しながら，正方形に外接している．このとき，正方形の 1 辺の長さはいくらか．



番組では，歴史学者の北川智子氏（専門は中世日本史と中世数学史．カナダのブリティッシュ・コロンビア大学で数学と生命科学を専攻．同大学院でアジア研究の修士課程を修了．プリンストン大学で博士号を取得．2009年より3年の間ハーバード大学で教鞭をとられ，2012年7月からは英国ニードム研究所を研究・執筆の拠点としている）は，この算額の問題を番組中で余弦定理（現在は高校1年生で学習）を適用して解き，「今の高校生でも最初に（この問題を）見たときは，ビックリするんじゃないか．とても難しい」とコメントしておられ，12歳の少年が余弦定理を知っていたことに驚いておられる．

番組で提示された余弦定理を適用した解答（ R, r, k はそれぞれ大円の半径，小円の半径，正方形の1辺の長さを示している）は次のようなものである：

正方形の2本の対角線の交点，大円の中心，小円の中心の3点を頂点とする『三角形を考える（下図参照）．



余弦定理より， $(R+r)^2 = \left(\frac{k}{\sqrt{2}} + R\right)^2 + \left(\frac{k}{2} + r\right)^2 - 2\left(\frac{k}{\sqrt{2}} + R\right)\left(\frac{k}{2} + r\right)\cos 45^\circ$ が成立する．よって，

$$R^2 + 2Rr + r^2 = \frac{1}{2}k^2 + \sqrt{2}Rk + R^2 + \frac{1}{4}k^2 + kr + r^2 - \sqrt{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}k^2 + \frac{r}{\sqrt{2}}k + \frac{R}{2}k + Rr\right)$$

なり， $\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}Rk - (2 + \sqrt{2})Rr = 0$ を得る．

2 次方程式の解の公式により，

$$k = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot R \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot R^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \{-(2 + \sqrt{2}) \cdot R \cdot r\}}}{2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$= -\sqrt{2} \cdot R \pm \sqrt{2 \cdot R^2 + 4 \cdot (2 + \sqrt{2}) \cdot R \cdot r} \dots \textcircled{1}$$

$$2R = 5, 2r = 3 \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入すると， } k = -\sqrt{2} \cdot \frac{5}{2} \pm \sqrt{2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4 \cdot (2 + \sqrt{2}) \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}}.$$

$k > 0$ なので， $k \doteq 4.4$ となる．■

勿論，上述の解法で良いのだが，この数理パズルは．考え方を工夫すると，三平方の定理だけを適用して解くことができる．三平方の定理だけを適用する解法は，敢えてここでは述べない．別の機会に譲る．

初等的解法で解くことができる数理パズルは，高等的解法で使用する知識を持ち合わせていない者達にも紹介できる．結果的に幅広い学年で紹介することが可能となる．従って，早い頃から工夫する楽しさ，しんどさを実感させることができる．

こうした実感から，次のような学習心理が生まれる．楽しいから，もっと色々な数理パズルを工夫して（初等的解法で）解いてみよう．しんどいので，もっと楽に解ける方法（高等的解法）は無いのか．もし在るのなら，それを修得してみよう．

上述した学習心理が動機付けとなり，延いては，算数・数学に興味を抱く者達の裾野が広がることが期待できる．即ち，数理パズルは算数・数学教育に有効に機能する，ということを再度指摘しておく．

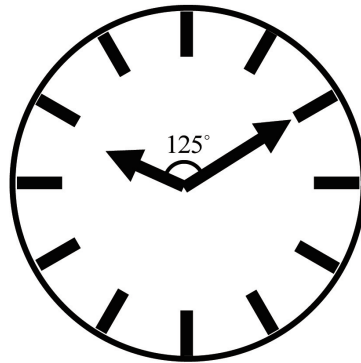
最後に，筆者が大阪商業大学，神戸芸術工科大学で実際に講義の合間に学生達に提示した数理パズルを解法は伏せて紹介しておく．必要な知識は小学校の算数の知識だけで十分である．

数理パズルと数学教育

数理パズルが好きな K 君と M 美の二人は、
ビーチでデートすることになりました。

K 君が M 美から手渡されたメモには、
メッセージと数字の位置が不明な時計盤が…：

下の時刻（午後）に、ビーチで待っています。 M 美



分針はピッタリの位置だけど、時針はそうじゃない。

さて、待ち合わせ時刻は何時何分か。

この研究は、平成23～24年度大阪商業大学アミューズメント産業研究所研究費を受けて行ったものである。

【注】

- 1) Martin Gardner (1914–2010). アメリカの数学者、著述家、アマチュア手品師。『サイエンティフィック・アメリカン』(Scientific American)誌上で1956年～1981年の25年に亘って連載したコラム「数学ゲーム」(Mathematical Games)で著名。生涯で70冊以上もの著作がある。
- 2) 『SF パズル』マーティン・ガードナー著、上島健吉訳、紀伊國屋書店、1982年。この書物は、アイザック・アシモフとジョージ・シザーズが1977年に刊行した『アイザック・アシモフ SF マガジン』に連載されたガードナーの36編のパズルを纏めたものである。
- 3) Isaac Asimov (1920–1992). ロシア生まれのアメリカの作家、生化学者。多作の作家であり、その著作は500冊以上にもなる。扱われたテーマは科学、言語、歴史、聖書など多岐に亘り、デューイ十進分類法の10ある主要カテゴリーの内、9つにも及ぶ。特に、SF、一般向け科学解説書、推理小説で著名。

- 4) スイス生まれの偉大な数学者レオンハルト・オイラー (Leonhard Euler, 1707–1783) の一筆書きに関する定理は、「ケーニヒスベルクの橋の問題」という数理パズルから生まれた。そして、この一筆書きに関する定理が契機となり、新しい数学の一分野としてグラフ理論が誕生した。現在、グラフ理論は非常に有用な数学として盛んに研究されている。このことから、アシモフの言葉は正にその通りであって、大きく首肯できるものである。
- 5) 吉田光由 (1598–1673) は、江戸時代前期の和算家で、京都の豪商であった角倉家の一族である。角倉了以は外祖父である。吉田光由は、一族の角倉素庵のもとで、中国の数学書『算法統宗』の研究を行い、それを元にして1627年 (寛永4年) に『塵劫記』を出版した。『塵劫記』は挿絵が多用されていて、算数・数学の基礎から応用まで解り易く学習できるように書かれた優れた数学入門書で、その評判は非常に高かった。
- 6) 和算 (日本で独自に発達した数学) の問題と答 (解法は書かれていない) を絵馬等を書き寺社に奉納したもの。
- 7) 鶴と亀が合計20匹いて、足の合計本数は52本である。鶴と亀はそれぞれ何匹いるか、というような問題。

筆者がタイトルを忘れてしまっている文献が多数あるので、参考文献は割愛するが、国内外のパズルに関する文献の全ての著者達にここに深く謝意を表する。特に筆者は、多湖輝氏の全24集からなる著作『頭の体操』の初期の著作には深く影響を受け、パズルの世界に誘われた。そして、中期、後期の著作によって筆者はパズルの世界に魅了され続けた。このような事情が契機となって、筆者はパズルに非常に興味を抱き (現在もこの状況は変わっていない)、国内だけに留まらず、海外のサム・ロイド氏、ヘンリー・アーネスト・デュドニー氏、マーティン・ガードナー氏、イアン・スチュアート氏の著作にも触れることになったことを特筆しておく。

筆者が深く影響を受けた多湖輝氏の著作『頭の体操』の全集 (出版社は全て光文社) のサブタイトル、出版年を以下にまとめておく：『頭の体操 第1集 パズル・クイズで脳ミソを鍛えよう』1966, 『頭の体操 第2集 百万人の脳ミソに再び挑戦する』1967, 『頭の体操 第3集 世界一周旅行をパズルでやろう』1967, 『頭の体操 第4集 これがカラー・テレビ式パズルだ』1967, 『頭の体操 第5集 天才のパーティに参加しよう』1977, 『頭の体操 第6集 タイムマシンの大冒険』1978, 『頭の体操 第7集 脳ミソのジャングルを冒険しよう』1985, 『頭の体操 第8集 夢と冒険のファンタジー・パズル』1986, 『頭の体操 第9集 びっくり地球大冒険』1987, 『頭の体操 第10集 銀河アドベンチャー・ツアーへようこそ』1988, 『頭の体操 第11集 夢のスーパー・ベースボール・パズル』1989, 『頭の体操 第12集 脳ミソ耐久ラリーへ、ようこそ』1990, 『頭の体操 第13集 開催! パズル・オリンピック』1991, 『頭の体操 第14集 世界の不思議を探険しよう』1992, 『頭の体操 第15集 挑戦! 頭のワールドカップ』1993, 『頭の体操 第16集 めざせ! 超発想の鉄人』1994, 『頭の体操 第17集 スペシャル 謎の館への招待状』1995, 『頭の体操 第18集 迷宮心理篇 名探偵に挑戦しよう』1996, 『頭の体操 第19集 頭脳改造篇 魔宮からの脱出』1997, 『頭の体操 第20集 真夏の夜の夢篇』1998, 『頭の体操 第21集 史上最大! 魅惑のマジックパズル』1999, 『頭の体操 第22集 脳空間7つの発想』2000, 『頭の体操 第23集 永遠の謎篇』2001, 『頭の体操 四谷大塚ベストセレクション 脳内宇宙開発プロジェクト発進!』2005。